

Lista de problemas 1: Física Quântica 2019.3

Radiação do corpo negro.

1. A temperatura de sua pele é de aproximadamente 35°C .
 - a) Considerando que a pele seja um corpo negro, qual é o comprimento de onda corresponde ao pico de emissão de radiação?
 - b) Considerando uma área superficial total de 2 m^2 , qual é a potencia total emitida por sua pele?
 - c) Baseado em sua resposta ao item anterior, por que você não brilha tão intensamente quanto uma lâmpada incandescente? **Respostas:** a) $9,42\text{ micrometros}$; b) 1 kW .
2. Considere uma cavidade, mantida à temperatura de 2000 K , com um pequeno orifício através do qual a radiação eletromagnética em seu interior pode escapar. Em qual comprimento de onda a cavidade irradia com maior intensidade? **Resposta:** 1449 nm .
3. Considere que o Sol é um corpo negro de temperatura 5700 K . O diâmetro do Sol é aproximadamente $1,4 \times 10^9\text{ m}$ e sua massa é $2,0 \times 10^{30}\text{ Kg}$:
 - a) Use a Lei de Stefan para calcular a energia total radiada pelo Sol em um ano.
 - b) A fonte de energia solar são fusões termonucleares. Utilizando a expressão $E = mc^2$, calcule a massa transformada por segundo em radiação pelo Sol.
 - c) Qual a fração da massa do Sol perdida a cada ano no processo de fusão?**Resposta:** a) $1,2 \times 10^{34}\text{ J}$; b) $4,1 \times 10^9\text{ kg}$; c) $6,5 \times 10^{-14}$
4. O máximo da distribuição espectral da potência irradiada por uma certa cavidade ocorre para o comprimento de onda de $24,0\text{ }\mu\text{m}$ (na região do infravermelho). A temperatura da cavidade é aumentada até que a potência total irradiada se torne duas vezes maior. (a) Determine a nova temperatura da cavidade. (b) Determine a nova posição do máximo da distribuição espectral. **Resposta:** (a) $143,6\text{ K}$; (b) $20,2\text{ }\mu\text{m}$.
5. A temperatura de um corpo negro diminui de 800 K para 650 K . Determine o quanto mudou o comprimento de onda que corresponde ao máximo de emissão do espectro de radiação deste corpo. **Resposta:** aumentou em 23% .

6. A radiância espectral $R_T(\nu)$ está relacionada com a densidade $\rho_T(\nu)$ da seguinte forma: $R_T(\nu) = \frac{c}{4} \times \rho_T(\nu)$. Calcule a radiância $R_T = \int_0^\infty R_T(\nu) d\nu$ para mostrar a lei de Stefan-Boltzmann

$$R_T = \sigma T^4,$$

em que $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3}$. Dica: você pode extrair fatores da integral e usar o resultado $\int_0^\infty x^3 / (e^x - 1) dx = \pi^4/15$. Use os valores das constantes h e k_B para mostrar que $\sigma = 5,6704 \times 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$.

Fótons, efeito fotoelétrico, efeito Compton.

7. Qual é o número aproximado de fótons emitidos por minuto por um pointer laser verde (532 nm) de potencia nominal 5,00 mW? **Resposta:** $n = 8,04 \cdot 10^{17}$

8. Uma estação de rádio transmite em uma frequência de 1 MHz (10^6 Hz) com uma potência radiada total de 5000 W.

a) Qual o comprimento de onda da radiação?

b) Qual a energia de cada fóton individual sendo emitido?

c) Quantos fótons são emitidos por segundo?

d) A antena de um aparelho de rádio deve receber pelo menos $2 \mu\text{W}$ (2×10^{-6} W) de potência para conseguir funcionar corretamente. Qual o número mínimo de fótons a antena deve receber por segundo em uma frequência de 1 MHz?

e) Os resultados das partes c) e d) indicam que o fenômeno de transmissão e recepção de rádio deve considerar a radiação como ondas ou partículas? Justifique. **Resposta:** (a) 300 m; (b) $E = 6,61 \cdot 10^{-28}$ J; (c) $7,5 \times 10^{30}$ fotons/s; d) 3×10^{21} fotons/s;

9. O molibdênio metálico tem de absorver radiação com a frequência mínima de $1,09 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$ antes que ele emita um elétron de sua superfície via efeito fotoelétrico. (a) Qual é a energia mínima necessária para produzir esse efeito? (b) Qual comprimento de onda de radiação fornecerá um fóton com essa energia? (c) Se o molibdênio é irradiado com luz com comprimento de onda de 120 nm, qual seria a energia cinética máxima dos elétrons emitidos? **Resposta:** (a) 4,51 eV; (b) 275 nm; (c) 5,82 eV.

10. Ilumina-se uma superfície de alumínio com luz de comprimento de onda 2000 \AA ($\text{Å} = 10^{-10} \text{m}$). No alumínio são necessários 4,2 eV para remover um elétron.

a) Qual a energia cinética do elétron mais rápido?

b) Qual a energia cinética elétron mais lento?

c) Qual o potencial de corte?

d) Qual a frequência de corte para o alumínio?

e) Se a intensidade da luz incidente for $2,0 \text{ W/m}^2$, qual o número médio de fótons por unidade de tempo por unidade de área que atinge a superfície? **Resposta:** a) 2 eV b) 0 eV c) 2 V d) 10^{15} Hz e) $2 \times 10^{18} \frac{\text{fótons}}{\text{m}^2 \text{s}}$

11. O potencial de corte para foto-elétrons emitidos por uma superfície iluminada por luz com $\lambda = 4910 \text{ \AA}$ é 0,71 V . Quando o comprimento de luz é mudado para λ_1 , o potencial de corte passa a ser 1,43 V . Qual o valor de λ_1 ? **Resposta:** $\lambda_1 = 3821 \text{ \AA}$

12. Um aparelho de raio X funciona com uma tensão de 95 kV para aceleração dos elétrons emitidos por um cátodo. Suponha que os elétrons são emitidos com energia cinética inicial desprezível. Determine o comprimento de onda mínimo dos raios X produzidos por esse aparelho. Justifique sua resposta explicando como se dá a produção de raios X. **Resposta:** $0,13 \text{ \AA}$

13. Fótons com $\lambda = 0,024 \text{ \AA}$ incidem sobre elétrons livres: a) Encontre o comprimento de onda de um fóton espalhado a 30° em relação à direção de incidência e também a energia cinética transferida ao elétron. b) Faça o mesmo para a direção 120° . **Resposta:** a) $\lambda = 0,0272 \text{ \AA}$ e $E = 61,6 \text{ keV}$ b) $\lambda = 0,0604 \text{ \AA}$ e $E = 312 \text{ keV}$

14. Raios-X de comprimento de onda 0.25 nm realizam espalhamento Compton com elétrons, que podem ser considerados no estado inicial de repouso, em uma folha metálica. Para o feixe

observado de raios-X espalhados a um ângulo de 60.0° em relação ao feixe incidente determine:

- a) O comprimento de onda dos raios-X espalhados.
- b) A energia dos raios-X espalhados.
- c) A energia cinética dos elétrons espalhados.
- d) A direção de propagação dos elétrons espalhados.

Respostas: a) 0.2512 nm; b) 4936 eV; c) 24 eV; d) 59.7° .

15. Suponha que você esteja realizando um experimento de efeito fotoelétrico. Usando um fotocátodo de Césio, você primeiro ilumina-o com um feixe laser verde ($\lambda = 514,5$) de $100mW$ de potência. Em seguida, você dobra a potência do laser para $200mW$. Como se comparam as energias por elétron emitido pelo catodo em cada caso? Discuta e esboce um gráfico da energia cinética dos elétrons nos dois casos.

Espectros atômicos e modelo de Bohr.

16. Usando o modelo de Bohr:

- a) Mostre que a frequência de revolução de um elétron no átomo de hidrogênio é dada por $\nu = 2|E|/hn$, onde E é a energia total do elétron no orbital n .
- b) Calcule a velocidade do elétron para $n = 1$ e mostre que ela pode ser escrita como

$$v = \alpha c, \text{ onde } \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$$

- c) Calcule numericamente o valor de α . Podemos ignorar efeitos relativísticos no átomo de hidrogênio? Justifique.
- d) Compare a força gravitacional entre um elétron e um próton no estado fundamental do átomo de hidrogênio ($n = 1$) com a força elétrica. Podemos desprezar a força gravitacional neste caso?

17. Um átomo de hélio uma vez ionizado, He^+ , tem um espectro análogo ao do hidrogênio, mas seu núcleo tem o dobro da carga do de hidrogênio. (a) desenvolva a teoria de Bohr para o He^+ , calculando os níveis de energia E_n em função das constantes físicas e , m_e , c , h , ϵ_0 . (b) Qual é a previsão para a energia do fóton emitido numa transição de $n = 2$ para $n = 1$. (c) Calcule a energia de ionização do He^+ . (d) Obtenha uma estimativa da distância entre o núcleo e o elétron desse átomo calculando o raio da primeira órbita de Bohr. **Resposta:** (a) $E_n = -2m_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2}$; (b) 40,8 eV; (c) 54,4 eV; (d) 0,264 Å

18. Qual o comprimento de onda mais curto que pode ser emitido pelo hélio uma vez ionizado? **Resposta:** 23 nm

19. A serie de Pfund resulta da emissão/absorção de fótons em transições do elétron no hidrogênio de (ou para) níveis mais altos para (ou do) nível $n = 5$. Quais são os comprimentos de onda mais curtos e mais longo dos fótons emitidos que correspondem à serie de Pfund? Algum deles é visível? **Respostas:** 2279 nm; 7460nm

20. Um átomo excitado de hidrogênio emite um fóton com energia de 1,133 eV. Quais são os estados inicial e final deste átomo, antes e após a emissão? **Resposta:** inicial 6, final 3

21. A constante de Rydberg modificada para uma massa nuclear finita é dada pela fórmula $R_{modificada} = R_H/(1 + m/M)$, onde m e M são, respectivamente, as massas de um elétron e de um núcleo. Determine o valor modificado da constante de Rydberg para:

a) um átomo de hidrogênio; b) um átomo hidrogenóide positrônico (no "núcleo" o próton é substituído por um pósitron e um elétron); c) um átomo hidrogenóide muônico (no núcleo é um próton e o elétron é substituído por um múon)

Princípio da incerteza e dualidade onda partícula.

22. Um nêutron possui uma energia cinética de 10 MeV. Que tamanho de objeto é necessário para observar efeitos de difração com nêutrons. Existe algo na natureza desse tamanho que pudesse servir como um alvo a fim de demonstrar a natureza ondulatória deste nêutron.

Resposta: 9 fm

23. a) Qual o comprimento de onda de Broglie para uma bola de massa $m = 0,3$ kg se movimentando com uma velocidade de 5,0 m/s? b) E para um objeto muito pequeno, porém macroscópico de massa $2,0 \times 10^{-9}$ g (a massa do elétron é de 9×10^{-29} g!) que se move com a velocidade 10^{-3} m/s? Com base nesses resultados, explique porque não observamos efeitos de difração e interferência para tais objetos utilizando fendas. c) Qual o comprimento de onda de Broglie para um elétron com energia cinética de 50 eV? Compare com os resultados anteriores.

Resposta: a) $4,41 \times 10^{-34}$ m; b) $3,31 \times 10^{-19}$ m; c) 0,17 nm

24. Num aparelho de televisão os elétrons são acelerados por um potencial de 20 kV. Qual é o comprimento de onda de Broglie desses elétrons? Se o potencial for duplicado, qual será o novo comprimento de onda? **Resposta:** 0,0087 nm; 0,0061nm.

25. O postulado de quantização de Bohr para seu modelo atômico pode ser derivado da hipótese de de Broglie. Considere um elétron no átomo de hidrogênio em uma órbita circular com um raio r qualquer.

a) Calcule o momento do elétron em função de seu raio r . b) Calcule seu comprimento de onda (λ) em função de r .

c) Se o elétron for considerado como uma onda, esta onda deve estar localizada em sua órbita. Considere que o tamanho circular da órbita ($2\pi r$) seja igual à um múltiplo inteiro de λ . d) Calcule os valores possíveis de r . Este valor concorda com os valores possíveis obtidos utilizando-se os postulados de Bohr?

26. Uma partícula de 50kg tem um comprimento de onda de de Broglie de 20cm.

a) Com que velocidade a partícula se desloca?

b) Qual é a incerteza mínima quanto à velocidade da partícula se a incerteza quanto à sua posição é de 20cm? **Resposta:** a) $6,63 \cdot 10^{-15} m/s$; b) $5,27 \cdot 10^{-36} m/s$

27. Considere um elétron livre com energia 0,5 keV que terá sua posição e momento determinados no mesmo instante. Se a posição for determinada com uma precisão de 4 \AA , qual será a porcentagem de incerteza em seu momento? $1 \text{ eV} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, $m \approx 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

Resposta: 1,1 %

28. Os núcleos atômicos são também sistemas quânticos com níveis de energia discretos. Um estado excitado de um certo núcleo tem uma meia vida de $0,5 \times 10^{-9}$ s, aproximadamente. Considerando que este tempo é a incerteza Δt para a emissão de um fóton, use a relação $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ para calcular a menor incerteza na frequência, $\Delta \nu$, do fóton emitido. Calcule a incerteza relativa, $\Delta \nu/\nu$, quando o comprimento de onda dos fótons emitidos é $\lambda = 0.01$ nm.

Respostas: $1,6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, e $5,3 \times 10^{-12}$.

Função de onda

29. Considere a função de onda:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-ax^2} e^{-ibt}$$

onde $a = \frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}$ e $b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}$.

a) Calcule a densidade de probabilidade, $|\Psi|^2$. Esta densidade depende do tempo? Onde esta densidade é máxima?

b) Calcule $|A|$ para que a probabilidade de encontrar a partícula em qualquer lugar do espaço seja 1. *Dica: Use $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\pi/\beta}$*

c) Mostre por substituição direta na equação de Schrodinger que esta função de onda é a solução para uma partícula de massa M sob um potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (correspondente a uma força restauradora do tipo sistema massa-mola). Encontre os valores de α e da energia desta partícula.

30. Verifique que a função

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A \sin \frac{4\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & x < -a/2 \text{ ou } x > a/2 \end{cases}$$

é uma solução da equação de de Schrödinger na região $-a/2 \leq x \leq a/2$ para uma partícula que se move livremente, mas esta confinada nessa região. Determine a energia associada ao estado cuja a função de onda é $\Psi(x, t)$ acima. Encontre a constante de normalização A . **Resposta:**

$$E = \frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}; A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$